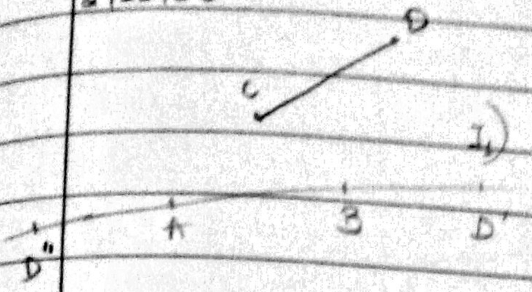
2/11/16



$I_1)$

$\overline{BD} \cong \overline{CD}$

$AD'' = AB + CD$

$\overline{AD'} = CD$

$AB + CD = BD'$

Πρόταση:

$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{CD} \cong \overline{C'D'}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{AB} + \overline{CD} \cong \overline{A'B'} + \overline{C'D'}$

→ Εφαρμόζοντας την πρόταση στο πάνω παράδειγμα:

$AB \cong AB$

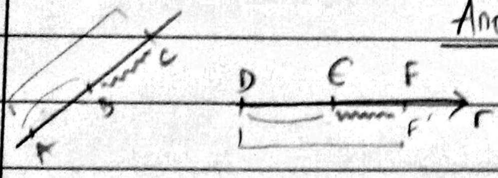
$BD' = CD - AD''$

$AB + BD' \cong AB + AD''$ Άρα είναι ίσα τμήματα!

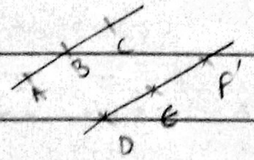
ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΩΝ

Πρόταση: Έστω A, B, C συνευθειακά ισχύει: $A * B * C$ και σημείο D και ημιευθεία με αρχή το D. Θεωρούμε ευθεία r ή 2 σημεία E, F ώστε: $\overline{AB} = \overline{DE}$ & $\overline{AC} = \overline{DF}$. Ν.δ.ο. $D * E * F$ ή $\overline{BC} = \overline{EF}$

Απόδειξη

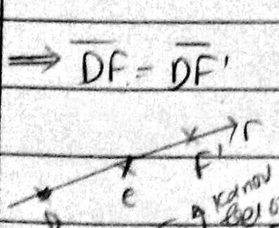


Γνωρίζουμε ήδη ότι $\overline{AB} = \overline{DE}$. Θεωρούμε ένα σημείο F' ευθείας του D ως προς E. Δηλαδή, $D * E * F'$ με $\overline{EF'} = \overline{BC}$



Από $I3)$ έπονται ότι $\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = \overline{DE} \\ \overline{BC} = \overline{EF'}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{AC} = \overline{DF'}$, με $\overline{AC} = \overline{DF} \xRightarrow[\text{ιδιότητα}]{\text{μεταβατική}}$

$\Longrightarrow \overline{DF} = \overline{DF'}$



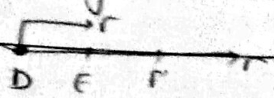
(F) κάπου εδώ θα είναι το F με αρχή το D

Ισχύει ότι $E \sim_D F$ (1) ✓

Αν δ.ο. $F' = F$ τότε $D * E * F' \Rightarrow D * E * F$

ή από $\overline{BC} = \overline{EF'} = \overline{EF}$

Επιλογή D, F'



A) $\overline{DF'} = \overline{DF}$

B) E, F στην r

Γ) $F' \not\sim_E D$

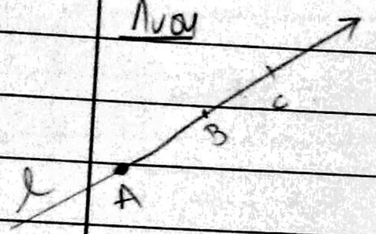
Ν.δ.ο $F \sim_D F'$ ① $\Longrightarrow$ μοναδικ (I_1) $F = F'$

↓ Προφανώς $E \sim_D F$ Ν.δ.ο $\boxed{E \sim_D F'}$ $\xrightarrow{\text{ιδιότητα}}$ $F \sim_D F'$

Επειδή $D * E * F' \Rightarrow E \sim_D F'$ □

▶ **Άσκηση**: 1) Έστω 3 σημεία A, B, C. Ν.δ.ο $A * B * C \Rightarrow \vec{AC} = \vec{AB}$

Λύση



$\vec{AB} =: \{A\} \cup \{X \in l : X \sim_A B\} =$

$= \{A\} \cup \{X \in (AB) : X$ βρίσκεται στην ίδια μεριά που βρίσκεται το $A\}$

$\vec{AC} =: \{A\} \cup \{Y \in l : Y \sim_A C\}$

Θέλω ν.δ.ο $\vec{AC} = \vec{AB}$ (σαν σύνολα)

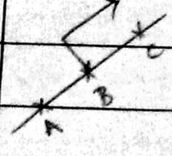
i) θ.δ.ο $\vec{AB} \subseteq \vec{AC}$: Έστω $X \in \vec{AB} \Rightarrow X = A$ ή $(X \neq A, X \sim_A B)$

$\Downarrow$ $X \in \vec{AC}$ (✓) $\qquad \Downarrow ?$ $X \sim_A C$ (δείχνει τότε $X \in \vec{AC}$)

Από $A * B * C \Longrightarrow \begin{cases} X \sim_A B & ① \\ B \sim_A C & ② \end{cases} \to X \sim_A C \Rightarrow X \in \vec{AC}$ □

Αντίστοιχα, ή το αντίστροφο.

2) Ισχύει $A * B * C$ ③ Ν.δ.ο $\vec{BC} \subseteq \vec{AC}$



Απόδειξη:

Έστω $X \in \vec{BC} \to X = B$ ① ή $X \sim_B C$ ②

$A * B * C \Rightarrow$ $\{ A \not\sim_B C,\ A \sim_C B,\ A \sim_A C \}$

Στόχος: $X \in \vec{AC} \to X = A$ ή $X \sim_A C$

Στην ①: $X = B \overset{?}{\Longrightarrow} B \in \vec{AC}$ ισχύει, γιατί από ③ $\Rightarrow B \sim_A C \Rightarrow B \in \vec{AC}$

Στην ②: Έστω $X \neq B$, $X \sim_B C$ ⑤ επίσης από $A \not\sim_B C$ ④ $\Longrightarrow X \not\sim_B A \Rightarrow$

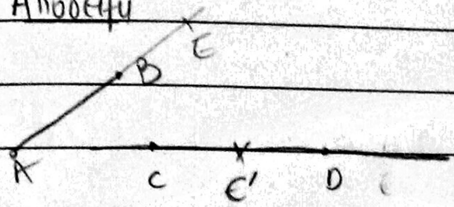
$\Rightarrow X \sim_A B$

& $A*B*C \Rightarrow B \sim_A C$ $\Big\}\rightarrow X \sim_A C$

Πρόταση: Δίνονται 2 ευθύγραμμα τμήματα $\overline{AB}$, $\overline{CD}$. Τότε, ένα και μόνο ένα από τα ακόλουθα ισχύει:

1) $\overline{AB} = \overline{CD}$
2) $\overline{AB} < \overline{CD}$
3) $\overline{CD} < \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AB} > \overline{CD}$

Απόδειξη



Από I1

Στην ημιευθεία $\vec{CD}$ υπάρχει σημείο E' μοναδικό, ώστε $\overline{CE'} = \overline{AB}$

Παρατηρούμε: $\exists!\, E \in \vec{AB} : \overline{AE} = \overline{CD}$

Ας κοιτάξουμε τη θέση του E στην ημιευθεία $\vec{AB}$:

i) $E = B$, τότε εφόσον $\overline{AE} = \overline{CD} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$ (1)

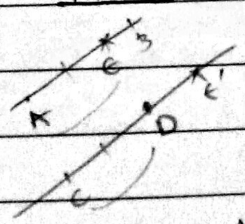
ii) E εσωτερικό του AB $\Rightarrow \overline{CD} < \overline{AB}$ (2)

iii) $A*B*E \Rightarrow \overline{CD} > \overline{AB}$ (3)

- Αποκλείεται η $E*A*B$, εφόσον $E \in \vec{AB}$

ΛΗΜΜΑ: E εσωτερικό του $\overline{AB}$ $\Leftrightarrow$ E' εξωτερικό του CD

($\Rightarrow$) $\overline{AE} = \overline{CD}$



$\overline{CE'} = \overline{AB}$

$E' \in \vec{CD} : \overline{CE'} = \overline{AB}$

$A*E*B$

Από προηγούμενη πρόταση: D εσωτερικό $CE' \Rightarrow C*D*E'$

$\Rightarrow$ E' εξωτερικό του $\overline{CD}$

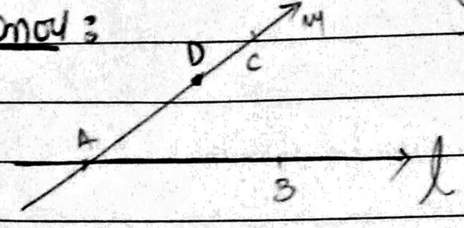
($\Leftarrow$) Άσκηση (H/W) η αποδείχθηκε

Ας υποθέσουμε τα (2) & (3) αληθή

E εσωτερικό $\overline{AB}$ → E' εσωτερικό του $\overline{CD}$, φανερό ότι δεν ισχύει λόγω λήμματος

Προφορα αποδειξεις των ① & ③ → H/W

▶ **Παρατηρηση:**



Γωνια: $C\hat{A}B = B\hat{A}C = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$

• $C \notin l$. Θδο $\forall D \in \overrightarrow{AC}$, $D \sim_l C$, για $D \neq A$.

$D \in \overrightarrow{AC} \underset{D \neq A}{\Rightarrow} D \sim_A C \Leftrightarrow \boxed{\text{όχι}}$ $D * A * C$

δηλ. $A \notin$ στο εσωτερικο του $\overline{DC}$

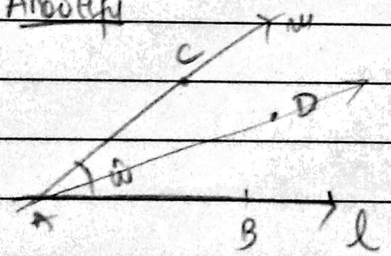
Θδο $D \sim_l C \Leftrightarrow \overline{DC} \cap l = \emptyset$

$\omega \cap l = \{A\}$

Αν $\overline{DC} \cap l \neq \emptyset \Rightarrow A \in \overline{DC} \cap l \Rightarrow A \in \overline{DC}$, ατοπο αφου $A \notin \overline{DC}$

H/W → • **Ασκηση:** 3) $B\hat{A}C \overset{=\omega}{}$ γωνια. Αρα A, B, C οχι συνευθειακα. ① Αν D εσωτερικο της $\hat{\omega}$ τοτε και η ημιευθεια $\overrightarrow{AD} \setminus \{A\} \subseteq$ εσωτερικο της $\hat{\omega}$

Αποδειξη

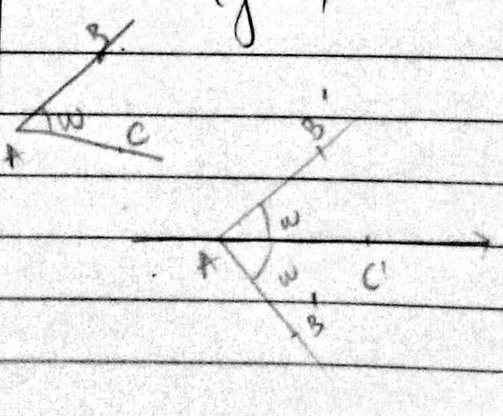


① → $D \sim_l C$ & $D \sim_\omega B$

(με χρηση προηγουμενου)

• **Αξιωματα Γωνιων**

Μεταφορα Γωνιων I4) Εστω γωνια $B\hat{A}C \overset{=\omega}{}$ και $\overrightarrow{A'C'}$ ημιευθεια. Τοτε, με καθε ενα απο τα δυο ημιεπιπεδα που οριζει η $A'C'$ τοτε $\exists$ μοναδικη ημιευθεια $A'B'$ ωστε $B'\hat{A'}C' = B\hat{A}C \ (=\hat{\omega})$

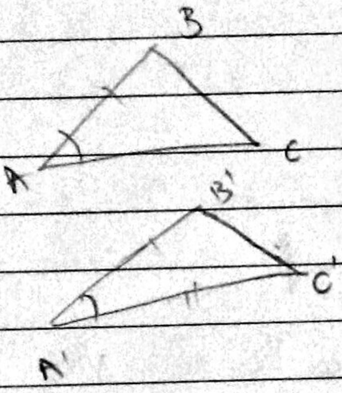


I5) Αν $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}=\hat{\gamma}$ $\Big\} \Rightarrow \hat{\beta}=\hat{\gamma}$

Όπου $\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}$ γωνίες και επιπλέον $\hat{\alpha}=\hat{\alpha}$, $\forall$ γωνία $\hat{\alpha}$

I6) Δίνονται δύο τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{A'B'C'}$. Υποθέτουμε $B\hat{A}C = B'\hat{A'}C'$ & $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ & $\overline{AC}=\overline{A'C'}$ $\Big\} \Rightarrow$

Τότε $A\hat{B}C = A'\hat{B'}C'$ & $B\hat{C}A = B'\hat{C'}A'$



Παρατήρηση / Πρόταση: Η σχέση ισότητας που ορίζεται ~~από~~ στο σύνολο των γωνιών είναι σχέση ισοδυναμίας

$\hat{\alpha}=\hat{\alpha}$

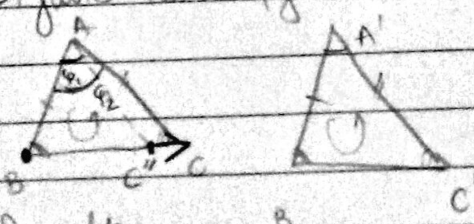
$\hat{\alpha}=\hat{\beta}$, $\hat{\beta}=\hat{\gamma} \Rightarrow \hat{\alpha}=\hat{\gamma}$

$\hat{\alpha}=\hat{\beta} \Leftrightarrow \hat{\beta}=\hat{\alpha}$

1° Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Θεώρημα: Έστω $\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ δύο τρίγωνα, ώστε $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{AC}=\overline{A'C'}$ & $B\hat{A}C = B'\hat{A'}C'$. Τότε $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{ABC}$

Οι γωνίες των 2 τριγώνων είναι ίσες (από I6). Αρκεί ν.δ.ο. $\overline{BC}=\overline{B'C'}$



Αν όχι [$\overline{BC}=\overline{B'C'}$] τότε $\overline{BC} > \overline{B'C'}$

Θεωρούμε την $\overrightarrow{BC}$ τω $\exists!\, C''$ στο εσωτερικό του $\overline{BC}$, ώστε $\overline{BC''}=\overline{B'C'}$ ($B * C'' * C$)

Θεωρούμε / Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABC''}$, $\overset{\triangle}{A'B'C'}$. Τότε $\overline{BC''}=\overline{B'C'}$, $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ & $A\hat{B}C'' = A'\hat{B'}C'$

γιατι
$(\overline{BC}=\overline{BC''}) \Rightarrow (A\hat{B}C = A\hat{B}C'')$

απο $I6 \Rightarrow$ ... ΑΞ 4 ορισμ

$\varphi_1 = B\hat{A}C''$ ∧ $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2$ Αρα, αρκει νδο $C \underset{AB}{\sim} C'' \Leftrightarrow \overline{CC''} \cap (AB) = \emptyset$

$\varphi_2 = B\hat{A}C$

Αν $CC'' \cap (AB) \neq \emptyset$ προφανως περιεχεται $(BC) \cap (AB)$

Δηλ. $CC'' \cap (AB) \neq \emptyset$

$\overset{\cap|}{(BC)} \cap (AB) = \{B\} \to B \in CC'' \cap (AB) \Rightarrow B \in \overline{CC''}$ (1)

Επειδη $B * C'' * C$, αν ισχυε η (1) θα ηταν: $B = C$ ή $B = C''$ ή $C * B * C''$

οπου παντα δεν μπορει να ισχυει λογω του ορου

Αρα δειξαμε οτι $\boxed{C \underset{AB}{\sim} C''} \Rightarrow \overrightarrow{AC}$ & $\overrightarrow{AC''}$ ειναι δυο ημιευθειες στο ιδιο

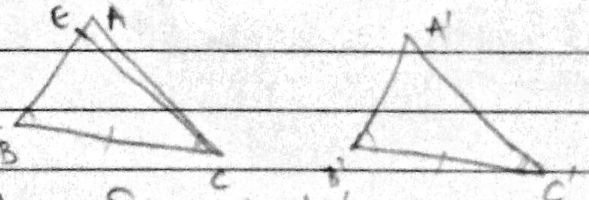
επιπεδο με ακμη AB, ωστε να ειναι ισες οι γωνιες $B\hat{A}C = B\hat{A}C''$, απο $I4$

οι ημιευθειες ειναι ισες $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC''} \overset{?}{\Rightarrow} C = C''$

(?) $\to$ $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} \cap (BC) = \{C\} \\ \overrightarrow{AC''} \cap (BC) = \{C''\} \end{array}\right\} \to C = C''$ ατοπο, αφου $B * C'' * C$

2ο κριτηριο ισοτητας

Ασκηση: Δινονται 2 τριγωνα $A\hat{B}C$, $A'\hat{B'}C'$, τ.ω $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $A\hat{B}C = A'\hat{B'}C'$ & $A\hat{C}B = A'\hat{C'}B'$. Τοτε $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$



Αρκει νδο $AB = A'B'$

Εστω οτι δεν ισχυει ... τοτε π.χ. $\overline{AB} > \overline{A'B'}$

Αρα ∃ μοναδικο $E \in \overrightarrow{BA}$, ωστε $\overline{BE} = \overline{B'A'}$ (& μαλιστα $B * E * A$)

Αρα συγκρινουμε τα τριγωνα $E\hat{B}C$ & $A'\hat{B'}C'$, απο το 1ο Κριτηριο $\to$ ισα

Απο αυτα τα δεδομενα προκυπτει: $B\hat{C}E = B\hat{C}A \Rightarrow E = A$ (ατοπο)

Αρκει νδο $E \underset{BC}{\sim} A$ (1) $\Leftrightarrow \overline{EA} \cap (BC) = \emptyset$

Αν $\left.\begin{array}{l} \overset{\cap|}{EA \cap (BC)} \neq \emptyset \\ (BA) \cap (BC) = \{B\} \end{array}\right\}$ $B \in EA$ ατοπο, γιατι $B * E * A$